Μαθημα 13ο 26/4/2017

Τοπολογια

Ορισμος

$(E,\rho)$ μ.χ , $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq E$ , θα εφοδιασουμε το $S$ με μια μετρικη $\rho_S$ , θα προκυψει $(S,\rho_S)$

$\rho: E \times E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\rho_S: S \times S \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\rho_S = \rho/_{S \times S}$ $(E=\mathbb{R}\ ,\ S=[0,1])$

Δηλαδη $\forall\, x,y \in S$ $\rho_S(x,y) = \rho(x,y)$

Το $(S,\rho_S)$ ονομαζεται υποχωρος του $(E,\rho)$

$(E,\rho)$ μ.χ , $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq E \rightsquigarrow (S,\rho_S)$

$a \in S$ , $r>0$

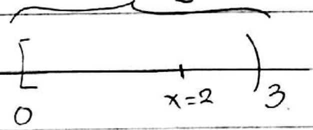
$$B_S(a,r) = \underbrace{B_{(S,\rho_S)}(a,r)}_{\subseteq S} = \{x \in S : \underbrace{\rho_S(x,a) < r}\}$$

$B''_{\rho_S}(a,r)$

$$= \{x \in S : \rho(x,a) < r\}$$
$$= S \cap \underbrace{B_\rho(a,r)}$$
$$= B_{\rho_S}(a,r)$$

π.χ

$E = \mathbb{R}$ και $S = [0,3)$




θελω τη $B(2,1)$ → κεντρο, → ακτινα

στο συγκεκριμενο πχ δεν διαφερουν τα $B_S(2,1)$ με $B_{\mathbb{R}}(3,1)$

δηλ $B_S(2,1) = B_{\mathbb{R}}(3,1)$

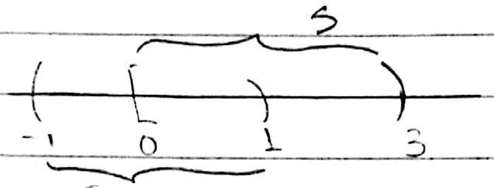
ταιρνω αλλη σφαιρα

$B_S(2,2) = B_{\mathbb{R}}(2,2) \cap S = (0,4) \cap S = (0,3)$

↳ μας ενδιαφερει η μπαλα στο $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

Π.χ $\quad B_S(0,\underbrace{1}_{=r})$ → κυκλος με ακτινα 1




δημιουργειται ο κυκλος μας → μπαλα στο $S=[0,3)$

$B_S(0,1) = B_{\mathbb{R}}(0,1) \cap S = (-1,1)\cap[0,3) = [0,1)$

Δεν μπορει να ειναι σφαιρα στο $\mathbb{R}$ το $[0,1) = B_S(0,1)$

Το $[0,1)$ δεν ειναι ανοιχτο στο $\mathbb{R}$

Το $[0,1)$ ειναι ανοιχτο στο $S$;;;

ισχυει οτι $\underbrace{[0,1)}_{A} \subseteq S = [0,3) \subseteq \mathbb{R}$

→ υποχωρος $\quad$ ευρυτερος χωρος

Παρατηρηση/Προταση

Εστω $(E,\rho)$ μ.χ , $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq E \Rightarrow (S,\rho_S)$ υποχωρος

$A \subseteq S$. Ποτε το $A$ θα ειναι ανοιχτο στο $S$

Θα ειναι ανοιχτο στο $S$ αν το $A$ γραφεται

$A = S \cap B$ για καποιο $B$ ανοιχτο στο $(E,\rho)$

Αποδειξη

($\Rightarrow$) Εστω οτι το $A \subseteq S$ ειναι ανοιχτο στο $(S,\rho_S)$

$\Rightarrow (\forall x \in A)(\exists r_x > 0) : B_{\rho_S}(x,r_x) \subseteq A$ $\quad$ ενωση ολων των σφαιρ. περιοχων

$$A \subseteq \bigcup_{x\in A} B_{\rho_S}(x,r_x) \subseteq A$$

↳ δεχει κεντρο το $x$ και ενωσαμε $\forall x \in A$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} B_{\rho_S}(x,r_x) = \bigcup_{x\in A}[B_\rho(x,r_x)\cap S] =$$

καθε ανοιχτη σφαιρα ειναι ανοιχτο συνολο

$$= S \cap \underbrace{\Big[\bigcup_{x\in A} B_\rho(x,r_x)\Big]}_{\text{θετω } = B} = S\cap B$$

Οποτε $B$ ανοιχτο ως ενωση ανοιχτων

(⇐) Έστω ότι $A = S \cap B$, $B$ ανοιχτό στο $E$

Θδο $A$ ανοιχτό στο $S$

Έστω $x \in A$ θδο $(\exists\, r_x > 0)$: $B_{\rho_S}(x, r_x) \subseteq A$

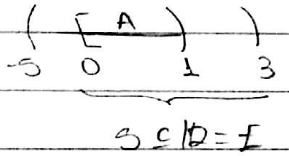
Έχουμε ότι $x \in A = S \cap B \Rightarrow x \in S \wedge x \in B$ (2)

μας χρειάζεται γιατί θα μιλήσω για σφαίρες στο $S$

(2) $\Rightarrow$ $B$ ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, r_x > 0 : B_\rho(x, r_x) \subseteq B$ τομές με το $S$ για να πάρω το ζητούμενο

$\Rightarrow B_\rho(x, r_x) \cap S \subseteq B \cap S = A \Rightarrow B_{\rho_S}(x, r_x) \subseteq A$

Και έτσι έχουμε το ζητούμενο




Το $A = [0,1)$ είναι ανοιχτό στο $S$

Μπορώ να πάρω και $-5$ όχι $-1$

Δηλ. $[0,3) \cap (-5, 1) = A = [0,1)$

Πχ

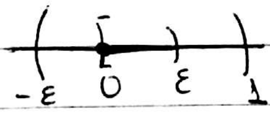
$[0,1) \subseteq [0,3) = S \subseteq E = \mathbb{R}$

$0 \in A$

1η ερώτηση: $0 \in A^\circ$;

Ανήκει στο εσωτερικό ως προς το $E$ ή ως προς το $S$;

- $0 \in A^\circ_E$; Επειδή οι σφαίρες φεύγουν από αριστερά αυτό δεν ισχύει δηλ. $0 \notin A^\circ_E$
- $0 \in A^\circ_S$




! $A \subseteq S \subseteq E$, $A$ ανοιχτό στο $E \Rightarrow A = A \cap S$

$A$ ανοιχτό, κλειστό στον εαυτό του

$\subseteq E \quad \subseteq E$

$A-B = (A\cap B)^c$ ισχυει

Προταση

$(E,\rho)$ μ.χ και $S\neq\emptyset$, $S\subseteq E$ και $A\neq\emptyset$, $A\subseteq S$

Τοτε το $A$ ειναι κλειστο στο $S \Leftrightarrow \exists\, C$ κλειστο στο $E : A = S\cap C$

Αποδειξη

($\Rightarrow$) $A$ κλειστο $\subseteq S$ (θελω να φτιαξω το συμπληρωμα του στο $S$)

$\Rightarrow$ $S-A =$ συμπληρωμα του $A$ στο $S$ ειναι ανοιχτο

στο $S \Rightarrow \exists$ $B$ ανοιχτο στο $E$ : $S-A = S\cap B \Rightarrow$

$A = S-(S-A) = S-(S\cap B) = S\cap(S\cap B)^c =$

$= S\cap(\underbrace{S^c\cup B^c}_{\text{απο De Morgan}}) = (S\cap S^c)\cup(S\cap B^c) = \emptyset\cup(S\cap B^c) = S\cap B^c$

Αρα $B$ ανοιχτο στο $E \Rightarrow B^c$ κλειστο στο $E$

($\Leftarrow$) $A = S\cap C$, $C$ κλειστο στο $E$. Νδο $A$ κλειστο στο $S$

Α' τροπος (απλος)

Αρκει νδο $S-A$ ανοιχτο στο $S$

$S-A = S-(S\cap C) = S\cap(S\cap C)^c = S\cap C^c$

$S$ κλειστο στο $E$ αρα $C^c$ ανοιχτο στο $E \Rightarrow$ το $S-A$

γραφεται ως τομη ανοιχτων στο $E$ .... ισχυει απο προταση

Β' τροπος (Απο βιβλιο Τσαματου)

$A$ κλειστο στο $S$

Αρκει $\forall (x_n)_n \subseteq A$

$\underbrace{x_n}$ $\xrightarrow{\rho_S} x$ με $x\in S$

ζηταμε $x\in A$

$\left.\begin{array}{l}\forall\,(x_n)_n \subseteq A \subseteq C \Rightarrow x_n\in C,\ \forall n \\ x_n \xrightarrow{\rho_S} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} x \quad C \text{ κλειστο στο } E\end{array}\right\} \Rightarrow x\in C$

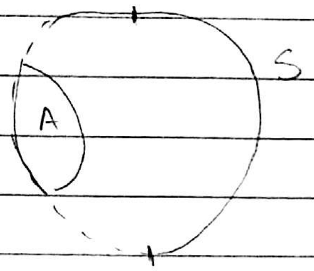
$x\in S$ θελουμε νδο $x\in S\cap C$ αρα αρκει $x\in C$ το οποιο εδειξα

Προταση

$(E,\rho)$ μ.χ , $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq E$ , $(S,\rho_S)$ , $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq S$

i) $\bar{A}_S = S \cap \bar{A}_E$

ii) $A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ_E$




$E = \mathbb{R}^2$

$\bar{A}_S = A$

$\bar{A}_E = \bar{A}_{\mathbb{R}^2}$

$x \in \bar{A}_E \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A : x_n \xrightarrow{\rho} x$ , $x \in E$

$x \in \bar{A}_S \Leftrightarrow x \in S \ \exists x_n \subseteq A : x_n \xrightarrow{\rho_S} x$

απλη ασκησουλα!

① $S = (0,+\infty) \subseteq E = \mathbb{R}$

$A = (0,1)_S$

θελω $\overline{(0,1)}_S$ και $\overline{(0,1)}_E$

$\overline{(0,1)}_E = [0,1]$ , $(0,1)^\circ_S = (0,1)$

$\overline{(0,1)}_S = (0,1]$ , $(0,1)^\circ_E = (0,1)$

② $\overline{[2,3)}_S = [2,3]$

$\overline{[2,3)}_E = [2,3]$

$[2,3)^\circ_S = (2,3)$

$[2,3)^\circ_E = (2,3)$

παρενθεση

Αποδειξη

ii) $A \subseteq S \subseteq E$

$A^\circ_E$ ανοιχτο στο $E$ $\Rightarrow$ $A^\circ_E \cap S$ ανοιχτο στο $S$ ③

④ $A^\circ_E \subseteq A^\circ_S$ το μεγ αν. ως προς το S που περιεχ στο A

$S \subseteq A \cap S \subseteq A$ ②

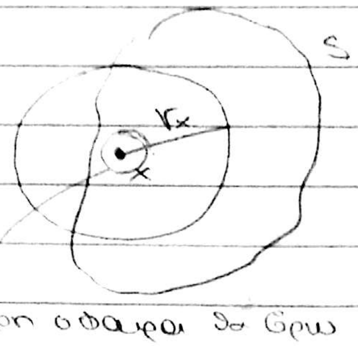
το μεγαλυτερο ανοιχτο στο $S$ που περιεχεται στο $A$
$\Rightarrow$ ① λογω ② και ③

i) $\bar{A}_E$ κλειστο στο $E$
$\Rightarrow S \cap \bar{A}_E$ κλειστο στο $S$
Ομως το $\bar{A}_S$ ειναι το μικροτερο κλειστο του $S$
που περιεχει το $A$
② $S \cap \bar{A}_E \supseteq A \Rightarrow \bar{A}_S \subseteq S \cap \bar{A}_E$

Θδο $x \in S \cap \bar{A}_E \subseteq \bar{A}_S$
Εστω $x \in S \cap \bar{A}_E$ Θδο $x \in \bar{A}_S$
$\Rightarrow x \in S$ και $x \in \bar{A}_E \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq A \subseteq S : x_n \xrightarrow{\rho} x$
$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho_S} x \Rightarrow x \in \bar{A}_S$ το ζητουμενο

ΑΣΚΗΣΗ (για το σπιτι)
Η σχεση $\bar{A}_S \subseteq S \cap \bar{A}_E$ να το αποδειξετε με
χρηση ακολουθιων

Προταση
$(E, \rho)$ μ.χ, $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq A$, $S$ ανοιχτο $\subseteq E$
τοτε οτι (ii) $\mathring{A}_S \supseteq S \cap \mathring{A}_E$ ισχυει η ισοτητα
(ii) $A^o_S \supseteq S \cap A^o_E$
Θδο $A^o_S \subseteq S \cap A^o_E$
Εστω $x \in A^o_S \Rightarrow \exists r_x > 0 : B_{\rho_S}(x, r_x) \subseteq A \Rightarrow$
$B_\rho(x, r_x) \cap S \subseteq A$ ① ②
φανερα εφοσον $x \in A^o_S \Rightarrow x \in S$
Θελω νδο $x \in A^o_E$ για να το δειξω αρκει να βρουμε
$r'_x > 0$ ωστε $B_\rho(x, r'_x) \subseteq A$ ③ πιο ισχυρο, μεγαλο
απο το ① περιεχει στοιχεια και εξω απο το $S$




$x \in B(x, r_x)$

και $x \in S$

$\left.\begin{array}{l} x \in S \\ S \text{ ανοιχτο στο } E \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, r_{1,x} > 0 : B_\rho(x, r_{1,x}) \subseteq S$ (1)

Αν θεσουμε $r'_x = \min\{r_x, r_{1,x}\} \Rightarrow$

$B_\rho(x, r'_x) \subseteq B_\rho(x, r_x)$ αλλα και $B_\rho(x, r'_x) \subseteq S$ λογω (1)

$\Rightarrow B_\rho(x, r'_x) \subseteq S \cap B_\rho(x, r_x) \overset{(2)}{\subseteq} A \Rightarrow$ (3)